



**மாகாணக் கல்வித் தினைக்களம் - வடமாகாணம்
ஆறாம் தவணைப் பரீட்சை - 2024**



இணைந்த கணிதம் - I

தரம் : 13(2024)

10 T I

முன்று மணித்தியாலம்

மேலதிக வாசிப்பு நேரம் 10 நிமிடங்கள்

சுட்டெண்

--	--	--	--	--	--	--

அறிவறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

(10) இணைந்தகணிதம்-I		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

இணைந்தகணிதம்-I

இணைந்தகணிதம்-II

இறுதிப் புள்ளிகள்

பகுதி A

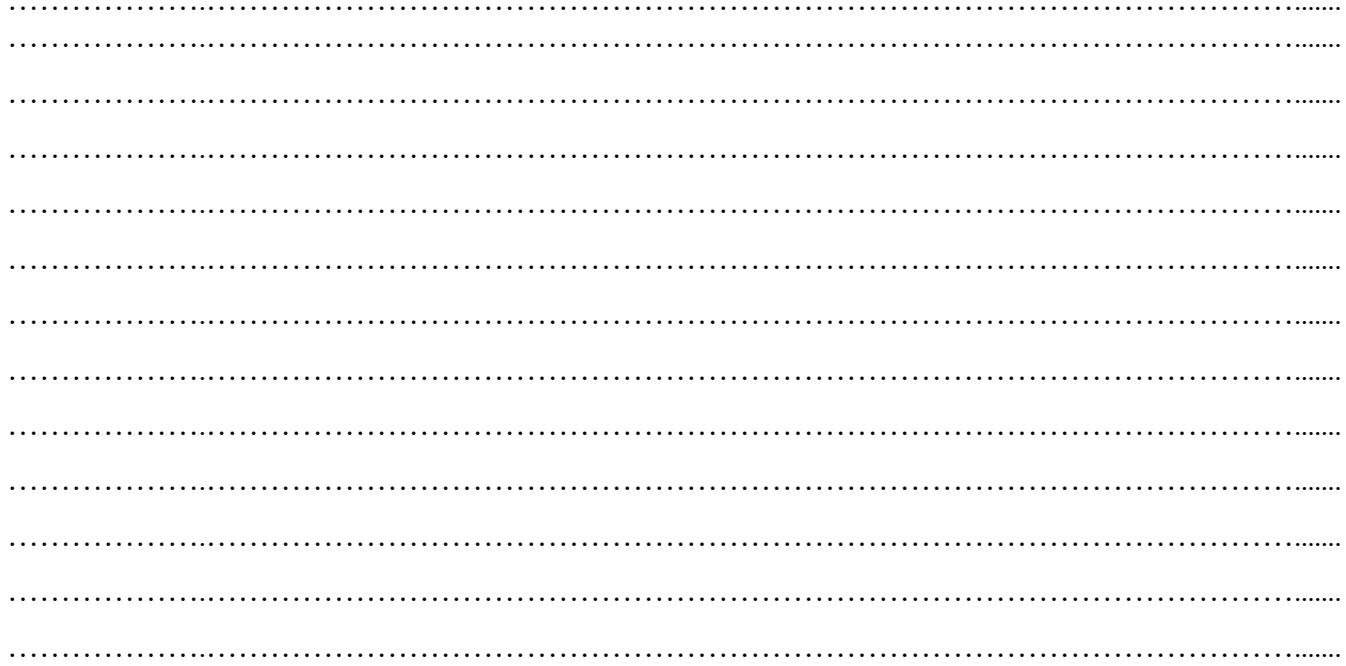
1. $a_1 = \frac{1}{2}$ எனவும் எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ எனவும் கொள்வோம். கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $a_n = \frac{n}{n+1}$ எனக் காட்டுக.

2. $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}|x + 1|$ ஆகியவற்றின் பரும்படி வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, சமனிலி $x^2 < \frac{1}{2}|x + 1|$ ஜத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க. சமனிலி $x^2 < \frac{1}{2}(|x| + 1)$ ஜத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் உய்த்தறிக.

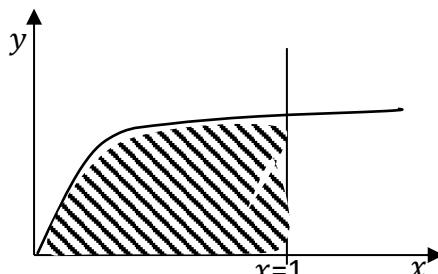
3. $|z - 4| \leq 5$, $Re(z) + Im(\bar{z}) \geq -1$ ஆகிய சம்பளிகளை திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஜ வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகளை கொண்ட பிரதேசம் S ஜ ஒர் ஆகன் வரிப்படத்தில் குறிக்குக பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

4. $(1 - 2x + ax^2)^4$ என்பதன் விரிவில் x^3 ஜி கொண்ட உறுப்பு இல்லை எனின் a ஜி காண்க.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x - 2x \tan x}{(1 - \cos 2x)^2} = \frac{1}{2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$



$$6. \quad y = \frac{\sqrt{xe^x}}{1+x}, x \neq -1 \quad \text{எனக்கொள்வோம்.}$$



நிமுங்கப்பட்ட பகுதி x அச்சுப்பற்றி 2π ஆரையன்களினுடாக சுழற்றப்படும்போது பெறப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

7. $0 < \theta < \pi$ இற்கு $x = 2\theta - \sin 2\theta, y = 2\sin^2 \theta$ ஆகியவற்றால் பரமான முறையால் தரப்படும் வளையி
னக் கொள்வோம்.

 - (i) $\frac{dy}{dx} = \cot \theta$ எனக் காட்டுக.
 - (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஜ θ இல் கண்டு வளையி கீழ்முகமாக குவிவானது என உய்த்தறிக.

8. $2x + 3y + 1 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$ எனும் இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒர் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $(2 + 3\lambda)x + (3 - 2\lambda)y + (1 + 5\lambda) = 0$ என வெளிப்படுத்தப்படலாம் எனக்காட்டுக. இங்கு λ - பரமானம். அந்நேர்கோடு $x + 2y = 0$ எனும் நேர்கோட்டை செங்குத்தாக இடைவெட்டுமாயின் λ இன் பெறுமானத்தைக்காண்க.

9. 2 அலகு ஆரையாகவும் உற்பத்தி O வை மையமாகவும் கொண்ட வட்டத்துக்கு வரையப்படும் மாறும் தொடலியானது x அச்சை A யிலும் y அச்சை B யிலும் இடைவெட்டுகிறது. O, A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாக செல்லும் வட்டத்தின் மையத்தின் ஒழுக்கு $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ எனக்காட்டுக.

$$10. \quad a, b \text{ மெய்ப் எண்களாயின்} \quad \tan^{-1}\left(\frac{2a-b}{\sqrt{3}b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2b-a}{\sqrt{3}a}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \text{எனக்காட்டுக}.$$

இதிலிருந்து , $\tan^{-1}\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$ என உய்த்தறிக.

பகுதி B

ஜந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. a) x இலுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$x^2 + kx + k^2 = 7x + k$$

இங்கு k ஒரு மாறிலி ஆகும்.

மேலே தரப்பட்ட இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை எனவும் அவற்றுக்கிடையிலான வித்தியாசத்தின் மிகக் குறைந்த பெறுமானம் 2 எனவும் காட்டுக.

α, β என்பன தரப்பட்ட இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனக. $\alpha + \beta, \alpha\beta$ ஆகியவற்றை k இல் காண்க.

$|\alpha - \beta| = 3$ ஆகுமாறுள்ள இருபடிச்சமன்பாட்டைக் காண்க.

- b) $f(x) = x^3 + (p+1)x^2 - 18x + q$ எனக.

இங்கு p, q என்பன நிறைவெண்கள்.

$x - 4$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

(i) $16p + q + 8 = 0$ எனக் காட்டுக.

$x + p$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனவும் $p > 0$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.

(ii) $p^2 + 18p + q = 0$ எனக் காட்டுக.

(iii) p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iv) $f(x)$ ஜ முற்றாகக் காரணி செய்க.

12. a) *BOOKKEEPER* என்ற சொல்லிலுள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்து செய்யத்தக்க வரிசைமாற்றத்தைக் காண்க.

ஆத்துடன் அச் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் இருந்து தடவைக்கு நான்கு எழுத்துக்களை எடுத்து செய்யத்தக்க வரிசைமாற்றத்தினையும் காண்க.

- b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இங்கு $2r + 1 = A(r + 1) + Br$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் A, B ஜக் காண்க. $r \in \mathbb{Z}^+$ இங்கு ஒரு தொடரின் பொது உறுப்பு $U_r = (-1)^{r+1} \frac{2r+1}{r(r+1)}$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது மேலுள்ள முடிவினைப் பயன்படுத்தி $r \in \mathbb{Z}^+$ இங்கு $U_r = f(r) - f(r + 1)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஜக் காண்க. அதிலிருந்து அத் தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $S_n = \sum_{r=1}^n U_r$ ஜக் கண்டு S_{n+1} ஜயும் எழுதுக n ஒற்றை நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $S_n \cdot S_{n+1} = 1$ என உய்த்தறிக.

- 13.

- a) $\lambda \in R$ ஆக இருக்க தாயம் A ஆனது $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. எப்பெறுமானத்திற்கும் A^{-1} உண்டு எனக்காட்டுக. A^{-1} ஜ எழுதுக. $B = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ இங்கு $x_1, x_2 \in R$ ஆகும்
- I. $AA^T = B$ ஆகுமாறு λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க
 - II. $\lambda = 4$ ஆகுமாறும் $\mu \in R$ ஆகவும் இருக்க $AX = \mu X$ எனின் $x_1 = x_2 = 0$ எனக்காட்டுக.

- b) $z = x + yi$, $x > 0, y > 0$ என்க ஆகன் வரிப்படத்தில் புள்ளி P ஆனது z ஜ குறிக்கிறது அதே வரிப்படத்தில் $\sqrt{3}iz$, $z + \sqrt{3}iz$, $z - \sqrt{3}iz$ என்பவற்றை Q, R, S என்பன குறிப்பின் பெபுள்ளிகளை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக. $\arg(z) = \theta$ எனக் கொள்க.
- R கற்பனை அச்சில் இருப்பின் θ ஜ காண்க.
 - z^2 வகைகுறிக்கும் புள்ளி உற்பத்தி O, R என்பன ஒரே நேர் கோட்டில் இருப்பின் $\theta = \frac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.
 - $|z + i\sqrt{3}z|^2 + |z - i\sqrt{3}z|^2 = 8|z|^2$ எனக் காட்டுக.

- c) $z_0 = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$, $\omega = \cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14}$ எனக்கொள்க. தாய்மோவரின் தேற்றத்தை உபயோகித்து $z_1 = z_0\omega, z_2 = \omega z_0^3, z_3 = \omega z_0^9$ ஆகிய சிக்கலெண்களை $(\cos \theta + i \sin \theta)$ என்னும் வடிவில் உணர்த்தி அவற்றை ஒர் ஆகன் வரிப்படத்தில் குறிக்குக. $\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}\right) = \frac{3\pi}{7}$ எனக் காட்டுக.

14.a) $x \neq 1, -2$ இற்கு $f(x) = \frac{(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ எனக்.

$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq 1, -2$ இற்கு $f'(x) = \frac{-x(x-4)}{(x-2)^2(x+2)^2}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடையையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடையையும் காண்க.

அனுகுகோடுகள் திரும்பற்கோடுகள் x அச்சை வெட்டும் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைக. $f(x)$ இன் வீச்சை எழுதுக.

- b) சதுர வடிவான கடதாசித்தாளொன்றின் ஒரு பக்க நீளம் 0.6 m ஆகும். அதன் மூலைகளில் பக்க நீளம் x ஜ உடைய நான்கு சதுரங்கள் அகற்றப்படுகின்றது. அதன் ஓரங்கள் பொருத்தமான முறையில் மடித்து அடி சதுரமாக உடைய கனவுரு வடிவப்பெட்டி ஒன்று அமைக்கப்படுகின்றது. அதன் கனவளவு n எனின், n இற்கான ஒரு கோவையை x இல் எழுதுக.
- பெட்டியின் கனவளவு உயர்வாக இருக்குமாறு x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

15. $k \in R$ எனக்கொள்வோம்

- a) $I = \int_1^e \frac{e^{1+\ln x}}{x^k} dx$ எனக் கொள்வோம் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
- $I = e$
 - $I = \frac{(1-2k)e^{1-k}}{(1-k)^2} + \frac{k}{(1-k)^2}$

- b) $f(x) = (2x^2 - 1) \sin^{-1}(x) + x\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ எனின் $f'(x)$ ஜக் கண்டு $\int_0^1 x \sin^{-1}(x) dx = \frac{\pi}{8}$ என உய்த்தறிக.

c)

- $\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{2}{1+\sin x}$ என நிறுவுக.
- $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ என நிறுவி $\int_0^a f(x) dx = \int_0^\pi f(a-x) dx$ ஜயும். c யில் (i) இன் முடிவையும் பயன்படுத்தி $I = \int_0^\pi \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1+\sin x)^2} dx = \left(\frac{-2\pi^3}{3}\right)$ எனக் காட்டுக

$$16. l_1 = kx - y + 1 = 0, \quad \text{இங்கு } k \in \mathbb{Z}^+ \quad l_2 = x - 2y + 3 = 0 \quad \text{என்க } l_1 = 0, l_2 = 0 \quad \text{எனும்}$$

கோடுகள் அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகளினாடாக செல்லும் வட்டம் $S = 0$ இன் மையம், ஆரையினைக் காண்க. அத்துடன் k இன் பெறுமானத்தையும் காண்க. இக் k இன் பெறுமானத்துக்கு கோடுகள் $l_1 = 0, l_2 = 0$ இடைவெட்டும் புள்ளியை A என்க. A யினாடு அல்லது வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாடு $5x + y = 0$ எனக்காட்டுக. $l_1 = 0, l_2 = 0$ என்பவை இடைவெட்டுவதால் அமைந்த கோண இருக்குறாக்கிகளை காண்க.

அவற்றில் கூர்ந்கோண இருக்குறாக்கியை உய்த்தறிக

$l_1 = 0, l_2 = 0$ இனை தொடலிகளாகவும், விரிகோண இருக்குறாக்கியில் மையத்தைக்கொண்டதும், $\sqrt{5}$ அலகு ஆரையுடையதுமான இரு வட்டங்கள் உண்டு எனக்காட்டி அவற்றில் ஒன்றின் சமன்பாடு $s_1 = x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ எனக்காட்டி மற்றைய வட்டம் S_2 வைக் காண்க. $P \equiv (-1, 1)$ P யானது $s_1 = 0$ எனும் வட்டத்துக்கு வெளியே அமைந்தபுள்ளி எனக்காட்டுக. மேலும் P யில் இருந்து $s_1 = 0$ இங்கு வரைந்த தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் $x + y - 1 = 0, x - 2y + 3 = 0$ எனக்காட்டுக.

$$17. (a) \quad \text{வழக்கமான குறிப்பீடில் சைன் நெறியை எடுத்துரைக்க. } P \text{ என்பது}$$

$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \varphi$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக ஒரு முக்கோணி ABC யினுள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளியாகும் .

முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு வழக்கமானகுறிப்பீடில் $\frac{abc}{2} \left[\frac{BP}{bc} + \frac{CP}{ac} + \frac{AP}{ab} \right] \sin \varphi$ என நிறுவுக.

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \quad \text{என்பதை உய்த்தறிக.}$$

$$(b) 5\sin \theta + 12\cos \theta \text{ இனை } r \cdot \sin(\theta + \alpha) \text{ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்க.}$$

இங்கு, r, α என்பன துணியப்பட வேண்டியவை இதிலிருந்து ,

$$5\sin \theta + 12\cos \theta + 2011 \leq 2024 \quad \text{எனக் காட்டி ,}$$

$$5\sin \theta + 12\cos \theta + 2011 \quad \text{இனது இழிவுப் பெறுமானம் காண்க.}$$

$$(c) \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right) \text{ எனக்காட்டுக .}$$



மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம்-வடமாகாணம்
ஆறாம் தவணைப் பரீட்சை-2024



இணைந்த கணிதம் - II

தரம் : 13 (2024)

10 | T | II

முன்று மணித்தியாலம்
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் 10 நிமிடங்கள்

சுட்டெண்

--	--	--	--	--	--

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

(10) இணைந்த கணிதம்-II		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

இணைந்தகணிதம்-I

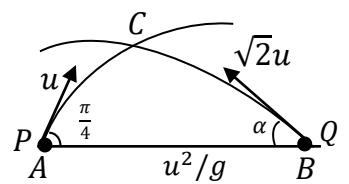
இணைந்தகணிதம்-II

இறுதிப் புள்ளிகள்

ପକୁତୀ A

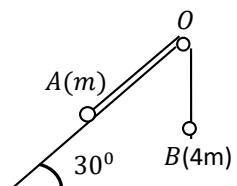
1. $m, \lambda m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய இரு துணிக்கைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது முறையே $u, \frac{2u}{3}$ என்னும் கதிகளில் ஒன்றையொன்று நோக்கி இயங்கி நேரடியாக மோதுகின்றன. மொத்தலுக்குப் பின்னர் துணிக்கைகள் $\frac{u}{2}$ என்னும் சம கதிகளில் எதிர்த்திசைகளில் இயங்குகின்றன எனத் தரப்பட்டுள்ளன. மீளமைவுக் குணகம் $\frac{3}{5}$ எனக் காட்டுக λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. A, B என்பன கிடைத் தரையில் $\frac{u^2}{g}$ இடைத்துரத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளாகும். P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் A, B இருந்து முறையே $\frac{\pi}{4}$, α என்னும் ஏற்றுக் கோணங்களில் $u, \sqrt{2}u$ என்னும் கதிகளில் ஒரே நேரத்தில் எறியப்படுகின்றன. அவை புள்ளி C இல் மோதுகின்றன. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டி, மோத எடுக்கும் நேரத்தை u, g சார்பில் காண்க.



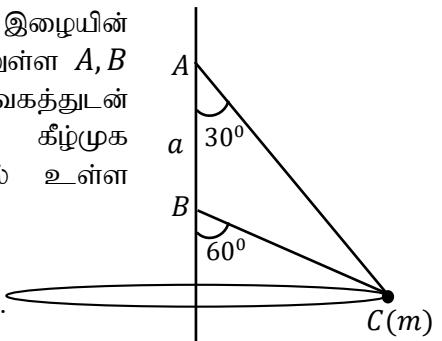
கொடுக்கும் தூத்தை x, y என்கின் கணம்.

3. முறையே $m, 4m$ திணிவுகளை உடைய A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஒர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் நுனிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையானது கிடையுடன் 30° இல் சாய்ந்துள்ள ஒரு கரடான சாய்தலாத்தின் உச்சியில் பொருத்தப்பட்ட ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று படத்தில் காட்டியவாறு திணிவுகளைக் காவுகின்றது. ஆரம்பத்தில் திணிவு A ஆனது கப்பியிலிருந்து a தூர்த்தில் ஓய்விலிருந்து அதியுயர் சாய்வுக்கோடு வழியே இயங்குமாறு விடப்படுகின்றது. பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் A மீது பருமன் $\frac{3}{2}mg$ ஜ உடைய விசை தாக்குகின்றது. A இன் ஆர்மூக்கலைக் காண்க. A ஆனது கப்பியை அ



4. 300 மெட்ரிக் தொன் திணிவுள்ள ஒரு புகையிரதம் ஒரு நேர்ச் சமதளப் புகையிரதப் பாதை வழியே மாறாக் கதி 15ms^{-1} உடன் இயங்கும் அதே வேளை இயக்கத்திற்கான தடை $50\text{N}/\text{மெட்ரிக் தொன்}$ ஆகும். புகையிரதத்தின் வலுவைக் கிலோவாற்றிற் காண்க. இப்போது 50 மெட்ரிக் தொன் திணிவுள்ள பிழக்கப் பெட்டி பிரிந்து செல்லும் அதே வேளை எஞ்சினின் உருந்து விசை மாறாமல் இருக்கின்றது. புகையிரதத்தின் எஞ்சிய பகுதியின் ஆர்மூக்கலைக் காண்க.

5. m திணிவுள்ள C என்னும் மோதிரம் கோர்க்கப்பட்ட இலேசான நீளா இழையின் முனைகள் ஒரு நிலைத்த நிலைக்குத்துக் கம்பியில் a இடைத்தாரத்திலுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளிற்குக் கட்டப்பட்டுள்ளன. C ஆனது y கோணவேகத்துடன் கிடைவட்டத்தில் இயங்குகின்றது. அப்போது AC, BC என்பன கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே $30^\circ, 60^\circ$ அமைக்கின்றன. இழையில் உள்ள இழைவை $\frac{2mg}{\sqrt{3}+1}$ எனவும் $\omega^2 = \frac{2g}{\sqrt{3}a}$ எனவும் காட்டுக.



6. O, A, B என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகளாகும். புள்ளி A இனுடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டில் BO இற்குச் சமாந்தரமாக \vec{BO} இன் போக்கில் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி C எனக் கொள்வோம். $\vec{OC} = \vec{OA} - \lambda \vec{OB}$ என நிறுவுக; இங்கு λ ஒரு மாறிலியாகும். $\vec{OB} = i + j$, $\vec{OA} = 2i - j$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. OB ஆனது OC இற்குச் செங்குத்தாக அமையுமாறு λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7. நீளம் l ஜ உடைய சீரான கோல் AB ஆனது அதன் மேல் முனை A ஓர் ஒப்பமான முனையில் படிந்தவாறும் A யின் மட்டத்திலுள்ள புள்ளி C இங்கு இணைத்த இழையொன்று மறுமுனை B யுடன் இணைக்கப்பட்டும் சமநிலையில் உள்ளது. சமநிலையில் கோல், இழை என்பன கிடையுன் அமைக்கும் கோணங்கள் முறையே α, β எனின், $\tan \beta = 2 \tan \alpha + \cot \alpha$ எனக் காட்டுக.

8. திணிவு m ஜி உடைய ஒரு பொருளானது கருடான கிடைத் தரையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பொருளுக்கும் கிடைத்தரைக்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். இப்பொருளானது கிடையுடன் கோணம் θ சாய்ந்த பருமன் P ஜி உடைய விசையினால் இழுக்கப்பட எல்லை நாப்பத்தில் உள்ளது. $P = \frac{m g}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$ எனக் காட்டி, P இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{m g}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ எனக் காட்டுக.

9. A, B என்பன Ω எனும் மாதிரிவெளியில் உள்ள யாதாயினும் இரு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A/B') = \frac{2}{3}$, $P(A/B) = \frac{3}{7}$ ஆகும். இங்கு B' என்பது B யின் நிரப்பு நிகழ்ச்சியாகும்.

(i) $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) A , B என்பன புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளா? உமது விடைக்கான காரணம் தருக.

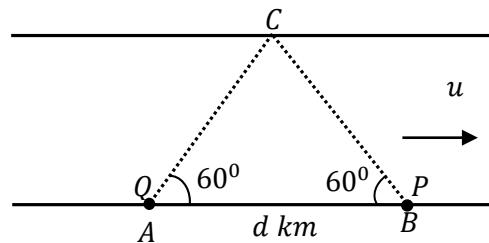
10. $7, a, b, 4, 4, 5, 5$ என்னும் ஏழு நேர்நிறைவெண்களிற்கு ஓர் ஆகாரம் மட்டும் உள்ளது. மேலும் இவ் ஆகாரமானது இடைக்குச் சமனாகும். a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு, ஏழு எண்களினதும் மாறுப்பிற்கையைக் காண்க.

பகுதி B

11. (a) $t = 0$ இல் ஒரு பலூன் புவி தொடர்பாக மாறா வேகம் u உடன் கிளம்புகின்றது. நேரம் $t = \frac{u}{g}$ இல் ஒரு துணிக்கை P ஆனது பலூனில் இருந்து மெதுவாக விழவிடப்படுகின்றது. நேரம் $t = \frac{2u}{g}$ இல் பலூனிலிருந்து வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது பலூனில் இருந்து மெதுவாக விழவிடப்படுகின்றது.

- (i) $t = 0$ இலிருந்து துணிக்கை Q ஆனது கண்நிலை ஓய்வடையும் வரைக்கும் பலூன், துணிக்கை P , துணிக்கை Q ஆகியவற்றின் புவி தொடர்பான வேக-நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.
- (ii) $t = 0$ இலிருந்து துணிக்கை Q ஆனது கண்நிலை ஓய்வடையும் வரைக்கும் P தொடர்பாக Q இன் வேக-நேர வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.
- (iii) துணிக்கை Q ஆனது கண்நிலை ஓய்வடையும் போது துணிக்கைகள் P, Q ஆகியவற்றிற்கு இடையிலான தூரத்தைக் காண்க.

(b) சமாந்தரமான நேர்க் கரைகளை உடைய ஒர் ஆறு சீரான வேகம் u உடன் பாய்கின்றது. A, B என்பன ஆற்றின் ஒரு கரையில் $d \text{ km}$ இடைத் தூரத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளாகும். C என்பது ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணியாக அமையுமாறு ஆற்றின் மறுகரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். ஒரு சிறுவன் P , புள்ளி B இலிருந்து ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியே புள்ளி C இற்கும் வேறொரு சிறுவன் Q , P ஜ இடைமறிக்கும் நோக்கோடும் ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியேயும் நீந்துகின்றனர். நீர் தொடர்பாக சிறுவர்களின் கதிகள் ஒவ்வொன்றும் $v (> u)$ ஆகும்.



- (i) சிறுவன் P , புள்ளி C ஜ அடைய எடுக்கும் நேரம் $\frac{2d}{\sqrt{4v^2 - 3u^2 - u}}$ எனக் காட்டுக.
- (ii) சிறுவன் Q இனால் சிறுவன் P ஜ இடைமறிக்க எடுக்கும் நேரம் $\frac{2d}{\sqrt{4v^2 - 3u^2 + 3u}}$ எனக் காட்டி, இடைமறிக்கும்போது P சென்ற தூரத்தையும் d, u, v சார்பில் காண்க.

12. (a) $2m$ திணிவும் α சாய்வும் உடைய ஓர் ஒப்பமான ஆப்பு, α சாய்வடைய ஓர் ஒப்பமான சாய்தளம் ஒன்றில் ஆப்பின் மேன்முகம் கிடையாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. m திணிவடைய துணிக்கையொன்று ஆப்பின் கிடை முகத்தில் சாய்தளத்திலிருந்து d கிடைத் தூரத்தில் வைக்கப்பட்டு தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.

- (i) ஆப்பின் ஆர்மூடுகலின் பருமனைக் கண்டு, துணிக்கையின் ஆர்மூடுகலின் பருமன் $\frac{3g \sin^2 \alpha}{2 + \sin^2 \alpha}$ எனக் காட்டுக.
- (ii) துணிக்கை சாய்தளத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம் $\left(\frac{2d}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2 + \sin^2 \alpha}{3 \sin \alpha \cos \alpha} \right\}^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக.
- (iii) துணிக்கை சாய்தளத்தை அடையும்போது ஆப்பு நகர்ந்த தூரத்தை d, g, α சார்பில் காண்க.

(b) முறையே $m, 2m$ திணிவுகளை உடைய A, B என்னும் துணிக்கைகள் $l \left(l > \frac{\pi a}{2} \right)$ நீளமுடைய

இலோசான நீளா இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. மையம் O வையும் ஆரை a ஜூம் உடைய ஒப்பமான நிலைப்படுத்தப்பட்ட கோளத்தின் அதியுயர் புள்ளியில் A ஆனது ஓய்வில் பிடிக்கப்படும்போது B ஆனது சுயாதீனமாகத் தொங்குகின்றது. பின்னர் A அனது மெதுவாக விடப்படுகின்றது. நேரம் t இங்குப் பின்னர் OA அனது மேன்முக நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்கும்போது துணிக்கை A ஆனது மேற்பரப்பில் இருக்கின்றதெனின், $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{3a}(1 + 2\theta - \cos \theta)$ எனவும் இழையில் உள்ள இழைவை $\frac{2mg}{3}(1 - \sin \theta)$ எனவும் காட்டுக.

13. திணிவு m ஜ உடைய துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் a ஜ உடைய மீள்தன்மை இழை ஒன்றின் ஒரு முனைக்கு இணைக்கப்பட்டு மறு முனை O எனும் நிலைத்த புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் இழையின் நிளம் $2a$ எனின் மீள்தன்மை மட்டு mg எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது O விற்கு நிலைக்குத்தாக கீழே $(2 + \sqrt{5})a$ தூரத்தில் ஓய்வில் பிடிக்கப்பட்டு விடுவிக்கப்படுகின்றது.

P இன் இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a) = 0$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக; இங்கு $OP = x$ ஆகும்.

$x - 2a = X$ என எழுதி, $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{a}$.

மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் சூத்திரம் $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ஜப் பயன்படுத்தி வீச்சம் c ஜூம் இழை தளரும்போது துணிக்கை P இன் கதியையும் காண்க.

துணிக்கை O விற்கு மேலே a உயரம் வரை எழும்பும் எனக் காட்டி, அது முதல் தடவையாக அதன் ஆரம்பப் புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எடுக்கும் நேரம், $2\sqrt{\frac{a}{g}}(\pi - \alpha + 2)$ எனக் காட்டுக; இங்கு

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ஆகும்.

அதிதாழ் புள்ளியில் துணிக்கை P இருக்கும்போது இழையில் உள்ள இழைவையைக் காண்க.

14. (a) $\underline{a}, \underline{b}$ என்பன பூச்சயமல்லாதனவும் சமாந்தரமல்லாதனவுமான காவிகள் எனவும் $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ எனவும் கொள்வோம். $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0}$ எனின், $\lambda = 0$ எனவும் $\mu = 0$ எனவும் காட்டுக. ABC ஒரு முக்கோணி ஆகும். AB இன் நடுப்புள்ளி D ஆகும். CD ஜ புள்ளி E ஆனது $CE:ED = 2:1$ ஆகுமாறு பிரிக்கின்றது. BC, AE (நீட்டப்பட்ட) ஆகிய கோடுகள் F இல் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{AC} = \underline{b}$ ஆகும். $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b})$ எனக் காட்டுக. $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AE}$,

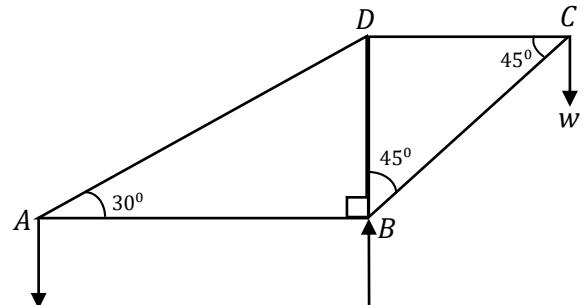
$$\vec{CF} = \mu \vec{CB} \text{ ஆகுமாறு } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ ஆகும். } \left(\frac{\lambda}{3} - \mu\right)\underline{a} + \left(\frac{\lambda}{3} + \mu - 1\right)\underline{b} = \underline{0} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து, λ, μ ஜக் காண்க.

- (b) $3\underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}, -3\underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}, -2\sqrt{3}\underline{j}$ என்னும் மூன்று விசைகள் முறையே $\underline{i} - \sqrt{3}\underline{j}, \underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}, -2\underline{i}$ என்னும் தானக் காவிகளை உடைய புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளதெனக் காட்டி, இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க. இப்போது $-\underline{i} - \sqrt{3}\underline{j}$ என்னும் தானக் காவியை உடைய புள்ளியில் $-3\underline{i} + 3\sqrt{3}\underline{j}$ என்னும் விசை மேலதிகமாகச் தொகுதியில் புகுத்தப்படுகின்றது. புதிய தொகுதி ஒடுங்கும் தனிவிசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

15. (a) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ யையும் நிறை W வையும் AB, BC, CD, DE, EA என்னும் ஜந்து சீர்க்கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒருமிக்கச் சுயாதீனமாக மூட்டுவதன் மூலம் ஒரு ஒழுங்கான ஜங்கோணி $ABCDE$ ஆக்கப்படுகிறது. கோல்கள் ED, DC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் ஓர் இலேசான கோலினால் இவ்வடிவம் பேணப்படுகிறது. ஜங்கோணியானது A இலும் B இலும் இணைக்கப்பட்ட இரு நிலைக்குத்து இழைகளினால் சமச்சீராகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. மூட்டு E இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளைக் காண்க. இலேசான கோலில் உள்ள உதைப்பு $W\left(3\tan\frac{\pi}{10} + \cot\frac{\pi}{5}\right)$ எனக் காட்டுக.

- (b) ஜந்து இலேசான கோல்களால் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட நிலைக்குத்தான் சட்டப்படலை உருகாட்டுகின்றது. AB, DC கிடையாகவும் BD நிலைக்குத்தாகவும் உள்ளன. C இல் நிறை W தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A, B இல் தாக்கும் இரு நிலைக்குத்து விசைகளால் சமநிலை பேணப்படுகின்றது. $D\hat{A}B = 30^\circ$, $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 45^\circ$ ஆகும். தகைப்பு வரிப்படமொன்றை வரைக. **இதிலிருந்து, எல்லாக் கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு அவை இழுவையா, உதைப்பா என வேறுபடுத்துக. மேலும் A, B இலுள்ள நிலைக்குத்து விசைகளையும் காண்க.**



16. ஆரை a ஜ உடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக் கோளத்தின் திணிவு மையத்தின் தானத்தைத் தொகையிடல் மூலம் காண்க.

ஆரை $2a$ ஜயும் உயரம் $\frac{3a}{2}$ ஜயும் கொண்ட சீரான திண்ம உருளையின் வட்டத் தளமுகம் ஒன்றின் மையம் O ஆகும். O ஜ மையமாகவும் ஆரை a ஜயும் கொண்ட திண்ம அரைக்கோளம் வெட்டி அகற்றப்படுகின்றது. எஞ்சிய திண்ம S எனக் கொள்வோம்.

(i) O இலிருந்து S இன் திணிவு மையத் தூரம் $\frac{51a}{64}$ எனக் காட்டுக.

S இன் மற்றைய தளமுகம் கிடையுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) சாய்தளமானது வழுக்குதலைத் தடுப்பதற்கு போதிய கரடானது எனவும் $\theta = \alpha$ ஆக உள்ளபோது S ஆனது கவிழும் தறுவாயில் உள்ளது எனவும் தரப்படின், $\tan \alpha = \frac{128}{45}$ எனக் காட்டுக.

(iii) சாய்தளத்திற்கும் S இன் அடிமுகத்திற்கும் இடையிலான உராய்வுக் குணகம் 0.8 எனவும் $\theta = \beta$ ஆக உள்ளபோது கீழ்நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயில் உள்ளது எனவும் தரப்படின் $\tan \beta$ ஐக் காண்க.

17. (a) A, B ஆகியன இரு சர்வசமனான பைகளாகும் பை A இல் 6 கறுப்புப் பந்துகளும் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் இருக்கும் அதே வேளை பை B இல் 8 கறுப்புப் பந்துகளும் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. பந்துகள் அவற்றின் நிறங்கள் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமனானவை. இப்போது முகங்கள் மீது 1, 2, 3, 4, 5, 6 என புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்ட ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக் கட்டையொன்று மீண்டும் மீண்டும் எறியப்படுகின்றது. உயர்ந்தப்பட்சம் மூன்று எறிகைகளில் பெற்ற புள்ளிகளின் கூட்டுத்தொகை செப்பமாக ஆறாக இருக்கும் எனின் பை A தெரிந்தெடுக்கப்படுகிறது. இல்லையெனின் பை B தெரிந்தெடுக்கப்படுகிறது. பின்னர் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட பையிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக வெளியே எடுக்கப்படுகின்றது.

- (i) வெளியே எடுக்கப்பட்ட பந்து கறுப்பு பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
- (ii) வெளியே எடுக்கப்பட்ட பந்து கறுப்பு பந்தெனத் தரப்படுமெனின், இப்பந்து பை A இலிருந்து வெளியே எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(b) ஒரு குறித்த பரீட்சைக்குத் தோற்றிய 100 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளின் கூட்டமாக்கிய மீட்டிறன் பரம்பல் அருகில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

- (i) உகந்த குறிமுறை ஒன்றைப் பயன்படுத்தி இப்பரம்பலின் இடை 50.7 எனவும் ஆகாரம் 51.02 எனவும் நியம விலகல் 9.46 எனவும் காட்டுக.
- (ii) மேற்குறித்த பரம்பலில் இடம்பெற்ற ஒவ்வொரு புள்ளியும் உண்மைப் புள்ளியிலும் பார்க்க 3 இனால் கூடியதெனப் பின்னர் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. உண்மைப் பரம்பலின் இடை, ஆகாரம், நியம விலகல் ஆகியவற்றைக் காண்க.
- (iii) இன்னும் 50 மாணவர்களின் புள்ளிகளின் உண்மை இடையும் நியமவிலகலும் முறையே 58, 2.5 எனின், ஒன்று சேர்ந்த புள்ளிகளின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

வகுப்பு	மீட்டிறன்
20-29	1
30-39	9
40-49	35
50-59	40
60-69	12
70-79	3